Signaux | Chapitre 4 | Correction TD (S4)

Exercice n°1 • Raies d'émission de l'hydrogène ★☆☆

1) On a :

n	1	2	3	4	5	6	7
$\mathcal{E}$ (eV)	$-13,6$	$-3,40$	$-1,51$	$-0,850$	$-0,544$	$-0,378$	$-0,278$

2) La différence d'énergie entre un niveau n et un niveau m vaut :

$$\mathcal{E}_n - \mathcal{E}_m = \frac{hc}{\lambda_{nm}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\lambda_{nm} = \frac{hc}{\mathcal{E}_0}\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right)^{-1}}$$

3) Paschen : IR. Balmer : viible. Lyman : UV.

4) Ce résultat est bien cohérent avec le spectre d'émission de l'hydrogène (on vérifie les longueurs d'onde de la série de Balmer).

Exercice n°2 • Microscopie à force atomique ★⯪☆

1) La pointe a une hauteur $\boxed{h_{pointe} \simeq 20 \text{ µm}}$ et une largeur $\boxed{L_{pointe} \simeq 1 \text{ µm}}$. Le levier a une épaisseur $\boxed{e_{levier} \simeq 80 \text{ µm}}$ et une largeur $\boxed{L_{levier} \simeq 4 \text{ µm}}$. Il s'agit bien de dimensions micrométriques, comme le précise l'énoncé.

2) Il s'agit du grossissement du microscope. C'est beaucoup plus qu'un microscope optique traditionnelle ($\times 40$ à $\times 400$ en général).

3) Lorsque la lumière interagit avec des objets de l'ordre de grandeur de sa longueur d'onde, elle diffracte et ne peut donc pas donner d'image nette de ces objets. Ici, la dimension typique de la pointe vaut $d \sim 2$ à $40\ \lambda_{visible}$, ce qui implique une forte diffraction.

4) La longueur d'onde de De Broglie des électrons vaut :

$$\lambda_{DB} = \frac{h}{p}$$

5) L'énergie cinétique des électrons vaut :

$$\mathcal{E}_c = \frac{p^2}{2m} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\lambda_{DB} = \frac{h}{\sqrt{2m\mathcal{E}_c}} = 17 \text{ pm}}$$

6) Un tel dispositif peut observer des objets (sans être affecté par la diffraction) de taille $d \sim 10$ nm, ce qui est bien en dessous de ce qu'il est possible d'observer avec une lumière de longueur d'onde $\lambda_{visible} \sim 500$ nm.

Exercice n°3 • Rayonnement stellaire ★⯪☆

1) L'œil reçoit une puissance de :

$$\boxed{\mathcal{P} = \mathcal{P}_S \times S \times 0,001\% = 1,57 \cdot 10^{-8} \text{ W}}$$

Avec $S = \pi D^2/4$ la surface de la pupille.

2) Le soleil émet majoritairement dans le vert (cf. loi de Planck, rayonnement des corps chauds). On prend donc pour approximation que le soleil n'envoie que des photons de longueur d'onde $\lambda = 500$ nm.

L'énergie d'un photon vaut :

$$\mathcal{E}_1 = \frac{hc}{\lambda}$$

En $\Delta t = 1$ s, le nombre N de photons atteignant l'œil vaut :

$$\mathcal{P} = \frac{N\mathcal{E}_1}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad \boxed{N = \frac{\mathcal{P}\lambda\Delta t}{hc} = 10^{10} \text{ photons}}$$

3) Pour les étoiles visibles les plus faibles (on garde une longueur d'onde moyenne de 500 nm), sans le filtre, le nombre N de photons atteignant l'œil par seconde vaut :

$$\boxed{N = \frac{\mathcal{P}_S\ S\ \Delta t}{\mathcal{E}_1} = 250 \text{ photons}}$$

4) Pour ces étoiles, l'œil reçoit environ un photon tous les $1/250 = 4$ ms. Cela est inférieur à la limite de 100 ms donnée par l'énoncé. La perception de lumière est bien continue.

Exercice n°4 • Diffusion Compton ★★☆

1) On a :

$$\left[\frac{h}{mc}\right] = \frac{\text{Énergie} \cdot \text{Temps}}{\text{Énergie/Vitesse}} = \text{Longueur}$$

Cette grandeur est bien homogène à une longueur.

$$\boxed{\frac{h}{mc} = 2,4 \text{ pm}}$$

2) Cette longueur est du même ordre de grandeur que la longueur d'onde des rayons X durs. Ces derniers vont donc fortement interagir avec les électrons du graphite.

3) Puisque cos$(\theta) < 1$, alors $\lambda' > \lambda$. On constate que la longueur d'onde du photon augmente, donc que son énergie diminue. On en déduit que le photon, en frappant le graphite, transfère une partie de son énergie à un électron.

4) La longueur d'onde des photons diffusés vaut (car cos$(\theta) = 0$) :

$$\boxed{\lambda' = \lambda + \frac{h}{mc} = 73,2 \text{ pm}}$$

5) Le photon perd une énergie :

$$\boxed{\mathcal{E} = hc\left(\frac{1}{\lambda'} - \frac{1}{\lambda}\right) \simeq 600 \text{ eV}}$$

Cette énergie est bien supérieure à l'énergie d'ionisation d'un électron. Ce dernier est donc arraché du graphite. Le reste de l'énergie correspond à l'énergie cinétique de l'électron.

Exercice n°5 • Dualité onde-corpuscule pour la lumière ★★☆

1) La relation de Planck-Einstein permet d'écrire :

$$\boxed{E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}}$$

La relation de de Broglie permet d'écrire :

$$\boxed{\vec{p} = \hbar \vec{k} = \frac{h}{\lambda}\vec{e_z}}$$

2) On utilise la relation de Planck-Einstein :

$$\boxed{E = \frac{hc}{\lambda} = 4,2 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 2,6 \text{ eV}}$$

3) L'inégalité d'Heisenberg spatiale s'écrit :

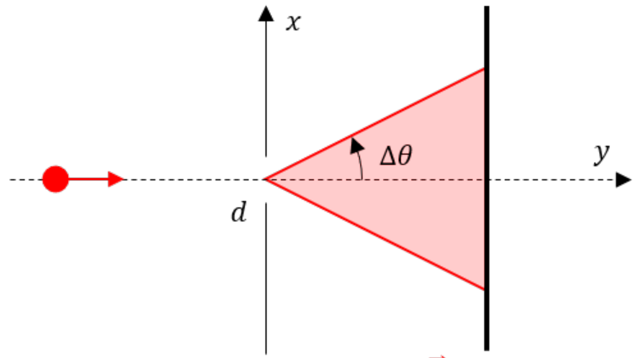
$$\Delta x \, \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$$

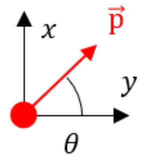
Or la position selon x de la particule qui passe à travers la fente a une indétermination de l'ordre de la largeur de la fente, c'est-à-dire $\Delta x = 2r$. On a donc :

$$\Delta p_x \geq \frac{\hbar}{4r}$$

Ainsi la vitesse selon $\vec{e_x}$ n'est pas nulle et il y a bien forcément une ouverture angulaire.

4) L'ouverture angulaire est caractérisée par la valeur de p_x.





$$\sin(\theta) \simeq \theta = \frac{p_x}{p} = \frac{p_x \lambda}{h} \quad \Rightarrow \quad \Delta\theta \simeq \Delta p_x \frac{\lambda}{h}$$

Donc, en ordre de grandeur :

$$\boxed{\Delta\theta \sim \frac{\lambda}{r}}$$

On retrouve bien l'expression connue pour le phénomène de diffraction.

5) On peut citer l'effet photoélectrique comme mise en évidence de l'aspect corpusculaire de la lumière.

6) Pour que l'effet photoélectrique soit possible, il faut que le photon ait une énergie supérieure au travail d'extraction du métal pour qu'un électron puisse s'extraire. Il faut donc : $E > W_e$. Les métaux subissant un effet photoélectrique avec la lumière bleue précédente sont donc le césium Cs, le sodium Na et le potassium K.

L'électron est extrait avec une énergie cinétique correspondant à la différence entre l'énergie du photon et le travail d'extraction :

$$\mathcal{E}_c = E - W_e = \frac{1}{2}mv^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{v = \sqrt{\frac{2(E - W_e)}{m}}}$$

La vitesse maximale correspond au travail d'extraction le plus faible, c'est-à-dire pour le césium. On a alors : $v(\text{Ce}) = 7,1 \cdot 10^5$ m·s^{-1}. On a bien $v \ll c$, les électrons sont bien non-relativiste et l'expression de l'énergie cinétique utilisée est bien correcte.

7) L'énergie de la source optique s'écrit ($ph =$ photon) :

$$E = \mathcal{P}\Delta t = N_{ph}E_{ph} = \frac{N_{ph}hc}{\lambda}$$

On a donc (pour $\Delta t = 1$ s) :

$$\boxed{N_{ph} = \frac{\mathcal{P}\Delta t\lambda}{hc} = 3 \cdot 10^{15} \text{ photons}}$$

8) On a un détecteur pour lequel $\Delta t = 10^{-12}$ s et on veut $N_{ph} = 1$ photon. On en déduit :

$$\boxed{\mathcal{P} = \frac{N_{ph}hc}{\lambda\Delta t} = 0,3 \ \mu\text{W}}$$

9) Dans le cas décrit, les photons arrivent un par un sur l'écran, on voit alors se dessiner point par point une figure d'interférences discrétisée qui va tendre vers la figure d'interférence habituelle des fentes d'Young pour un grand nombre de photons.

10) L'interprétation probabiliste de la figure d'interférence est la probabilité pour un photon de prendre un chemin qui amène à l'écran. Les zones lumineuses correspondent aux chemins ayant une forte probabilité d'être pris alors que les zones sombres correspondent aux chemins de faibles probabilités. Pour avoir une figure d'interférences il faut avoir une somme d'ondes, le principe de superposition s'applique donc aux amplitudes de probabilités qui sont correspondent aux fonctions d'onde.